b) montrons que : $U_n \geq 3$; $\forall n \in \mathbb{N}^*$

• $U_1 = \frac{17}{5} > 3$ (vrai)

• supposons que : $U_n \geq 3$ et montrons que $U_{n+1} \geq 3$

$U_n \geq 3 \Rightarrow f(U_n) \geq f(3)$ (car f est croissante) $\Rightarrow$ $U_{n+1} \geq 3$

conclusion : $U_n \geq 3$; $\forall n \in \mathbb{N}$

* $U_{n+1} - U_n = \frac{4U_n - 3}{U_n} - U_n = \frac{-U_n^2 + 4U_n - 3}{U_n} = \frac{-(U_n - 1).(U_n - 3)}{U_n}$

$\Rightarrow U_{n+1} - U_n \leq 0$ car $U_n \geq 3$ d'où (U_n) est décroissante.

c) (U_n) est décroissante et minorée par 3 donc elle est convergente

soit $\alpha = \lim\limits_{n \to +\infty} U_n$ on a: $U_n \geq 3 \Rightarrow \alpha \geq 3$

f est continue sur $[3, +\infty[$ d'où $\alpha = f(\alpha)$

$\alpha = f(\alpha) \Leftrightarrow \alpha^2 = 4\alpha - 3 \Leftrightarrow \alpha^2 - 4\alpha + 3 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1$ ou $\alpha = 3$ or $\alpha \geq 3 \Rightarrow \alpha = 3$

d) $U_n - 3 \leq 10^{-5}$ calculatrice $n_0 = 11$ $(n \geq 11)$

EXERCICE№16

$$\begin{cases} U_1 = 5 \\ U_{n+1} = 5 - \frac{6}{U_n} \ , \ n \geq 1 \end{cases}$$

1) $U_2 = \frac{19}{5}$; $U_3 = \frac{65}{19}$

2) démonstration par récurrence :

*** vérifions pour n = 0**

$U_{0+1} = U_1 = 5$

$\frac{3^{0+2} - 2^{0+2}}{3^{0+1} - 2^{0+1}} = \frac{9-4}{3-2} = 5$; $U_{0+1} = \frac{3^{0+2} - 2^{0+2}}{3^{0+1} - 2^{0+1}}$ (vraie)

***supposons que :** $U_{n+1} = \frac{3^{n+2} - 2^{n+2}}{3^{n+1} - 2^{n+1}}$ et montrons que :

$U_{n+2} = \frac{3^{n+3} - 2^{n+3}}{3^{n+2} - 2^{n+2}}$, on a : $U_{n+2} = 5 - \frac{6}{U_{n+1}} = 5 - \frac{6(3^{n+1} - 2^{n+1})}{3^{n+2} - 2^{n+2}}$

$= \frac{5(3^{n+2} - 2^{n+2}) - 6(3^{n+1} - 2^{n+1})}{3^{n+2} - 2^{n+2}} = \frac{5 \times 3^{n+2} - 5 \times 2^{n+2} - 2 \times 3^{n+2} - 3 \times 2^{n+2}}{3^{n+1} - 2^{n+1}}$

$= \frac{3 \times 3^{n+2} - 2 \times 2^{n+2}}{3^{n+2} - 2^{n+2}} = \frac{3^{n+3} - 2^{n+3}}{3^{n+2} - 2^{n+2}}$

*** conclusion :** $U_{n+1} = \frac{3^{n+2} - 2^{n+2}}{3^{n+1} - 2^{n+1}}$ pour tout $n \in IN$

Qarray.tn - Agra Blech- Qarray.tn